2.3 Geometrická optika

Podrobnější popis

Současná geometrická optika (GO) umožňuje vyšetřovat šíření elektromagnetických vln i ve složitých nehomogenních prostředích určitého druhu. Stejně jako klasická geometrická optika vychází z představy, že vlny se šíří podél paprsků, které však mohou být zakřivené. Je však podložena exaktní matematickou teorií vycházející z Maxwellových rovnic a dovoluje počítat nejen dráhy (trajektorie) vln, ale i změny velikosti a fáze intenzity pole a polarizace vln, k nimž při šíření v nehomogenním prostředí dochází. Nezanedbatelnou předností této metody je větší názornost díky snadné představě paprsků.

Jak již bylo uvedeno ve vrstvě A, teorie geometrické optiky vychází ze dvou základních předpokladů. Ty jsou:

1. Vlnové číslo k je velké. To je nutné z toho důvodu, aby se v průběhu matematických úprav mohly zanedbat některé členy s vyšší mocninou k ve jmenovateli. Předpoklad předurčuje aplikace GO na oblast optických frekvencí. Protože ale "vlnové číslo k nemusí být zase až tak moc velké", je metoda dobře použitelná i pro oblast dnes běžně používaných rádiových kmitočtů.
2. Vlnění se zkoumá relativně daleko od zdroje. Tam se modul intenzity pole mění při změně vzdálenosti jen málo; fáze se však mění rychle (o 2π na každou délku vlny nezávisle na vzdálenosti od zdroje).

V následujícím výkladu se omezíme na prostředí, v nichž se mění permitivita a permeabilita spojitě od místa k místu. Prostředí budou bezeztrátová. Index lomu prostředí

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \qquad (2.3B.1)$$

je tedy číslo reálné a je funkcí místa (x, y, z). Symbolem s budeme označovat souřadnici (obecně křivočarou), měřenou *podél* směru šíření.

Když se zabýváme šířením vln v homogenním prostředí, tak obvykle známe vlnové číslo $k = k_0\,(\varepsilon_r\mu_r)^{1/2} = k_0 n$ a také směr šíření. Např. pro intenzitu pole rovinné vlny pak platí známý vztah

$$E = E_0 \exp(-jks) \text{ (s je ve směru šíření).} \qquad (2.3B.2a)$$

Na části dráhy ds se změní fáze kmitání o

$$d\varphi = k ds = k_0 n ds. \qquad (2.3B.2b)$$

V souřadném systému x, y, z nemusí směr šíření souhlasit se směrem žádné osy. Obvykle si pak pomáháme tím, že vlnové číslo k považujeme za vektor, který má směr šíření. Jeho složky k_x, k_y, k_z do směrů souřadných os jsou vlnová čísla ve směrech x, y, z. Ve dvou libovolně položených bodech A, B, jejichž souřadnice se liší o dx, dy, dz, liší se fáze kmitání o

$$d\varphi = k_x dx + k_y dy + k_z dz. \qquad (2.3B.3)$$

Geometrická optika nepředpokládá apriorní znalost směru šíření, protože ten je (v prostředí s proměnným indexem lomu) v každém místě jiný. V analogii s (2.3B.2) se zde používá vztah

$$E = E_m \exp[-jk_0 L(x, y, z)]; \qquad (2.3B.4a)$$

$$d\varphi = k_0 dL, \qquad (2.3B.4b)$$

v němž se dráha vlny (vzdálenost) explicitně nevyskytuje. Veličina L je skalární funkcí souřadnic x, y, z. Nazývá se eikonála a určuje fázi intenzity pole v každém bodě. Porovnáním (2.3A.4b) a (2.3A.2b) zjistíme, že na nekonečně krátkém úseku ds (kde musí být $n = konst$), je

$$dL = n ds. \qquad (2.3B.5)$$

Z rovnice (2.3A.4) dále plyne, že rovnice $L = konst$ je rovnice plochy, na níž má kmitání stejnou fázi, tedy rovnice vlnoplochy. Vektor grad L má směr nejstrmější změny eikonály (tedy i fáze), a to je směr šíření vlny. Konkrétně je například:

$$\frac{dL}{ds} = |grad\, L|$$

a podle (2.3A.5) je

$$\frac{dL}{ds} = n,$$

takže

$$|grad\, L| = n \qquad (2.3B.6)$$

nebo

$$k_0 \frac{dL}{dx} = k_0 \frac{dL}{ds}\frac{ds}{dx} = k_0 \frac{dL}{ds}\cos(x,\ s) = k_0 n \cos(x,\ s) = k_x. \qquad (2.3B.7)$$

Ve vrstvě A již bylo řečeno, že rovnice

$$|grad\, L| = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2} = n \qquad (2.3B.8)$$

je považována za základní rovnici geometrické optiky. Vektor grad L má v každém bodě směr šíření vlny a křivka, jejíž tečna má v každém bodě směr grad L, je paprsek. Paprsky mohou být zakřivené a rovnice (2.3B.8) je diferenciální rovnicí paprsků.

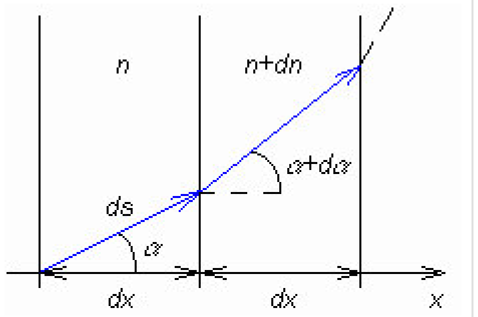
Pro praktické výpočty průběhu paprsků není tvar (2.3B.8) vhodný. Používají se následující vztahy:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(n\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \frac{\partial n}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial s}\left(n\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \frac{\partial n}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial s}\left(n\frac{\partial z}{\partial s}\right) = \frac{\partial n}{\partial z}, \qquad (2.3B.9)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1. \qquad (2.3B.10)$$

Již bylo řečeno, že s je souřadnice *podél* paprsku. Ukážeme si nyní, jak lze dospět např. k prvnímu ze vztahů (2.3B.9).

V homogenním prostředí, jak víme, běžně pracujeme s vlnovým číslem a s výhodou mu přisuzujeme význam vektoru, který má směr šíření. Složky vektoru k jsou (např. v dvojrozměrném prostředí) k_x a k_y a můžeme si představit, že vlna se dostává do kteréhokoli místa po lomené dráze rovnoběžně s xs vlnovým číslem k_x a pak rovnoběžně s y s vlnovým číslem k_y. V nehomogenním prostředí je stejný postup použitelný jen v rámci malé oblasti dx, dy, ve které můžeme považovat index lomu za konstantní. V rámci celého prostředí tak postupovat bezprostředně nelze, protože k_x a k_y se místo od místa mění. Tyto změny musíme napřed vyšetřit.



Obr. 2.3B.1 *Dvojrozměrné nehomogenní prostředí*

V nehomogenním prostředí raději počítáme s indexem lomu než s vlnovým číslem. Protože $k = k_0 n$ a vlnové číslo je vektor, musí být vektor i na pravé straně této rovnice. Přisoudíme proto význam vektoru indexu lomu n. Jeho velikost je n a jeho směr je totožný se směrem šíření (obecně je v každém místě jiný). Složky n_x a n_y odpovídají příslušným vlnovým číslům, například $k_x = k_0\, n_x$. Touto dohodou jsme z nehomogenního prostředí dostali prostředí anizotropní, což z mikroskopického hlediska ovšem pravda není. Z makroskopického hlediska to v jistém smyslu pravda je: když vlna vstupuje do tohoto prostředí v různých směrech, její dráha je pokaždé zakřivená jinak. V homogenním prostředí je situace jiná.

Uvažme nyní dvojrozměrné prostředí, v němž se index lomu mění pouze ve směru x. Na obr. **2.3B.1** jsou nakresleny dvě elementární vrstvy tohoto prostředí a příslušné veličiny v nich. Vyšetříme změny složek indexu lomu $n_x = n\cos(\alpha)$ a $n_y = n\sin(\alpha)$ ve směru x:

$$dn_x = d(n\cos\alpha) = (n+dn)\cos(\alpha + d\alpha) - n\cos\alpha,$$
$$dn_y = d(n\sin\alpha) = (n+dn)\sin(\alpha + d\alpha) - n\sin\alpha.$$

Rozepíšeme goniometrické funkce podle součtových vět, roznásobíme, položíme sin $d\alpha = d\alpha$ a cos $d\alpha = 1$. Pak

$$dn_x = dn\cos(\alpha) - n\sin(\alpha)d\alpha, \qquad (2.3B.11a)$$

$$dn_y = dn\sin(\alpha) - n\cos(\alpha)d\alpha. \qquad (2.3B.11b)$$

Pro další úvahu je podstatná je skutečnost, že změna dn_y ve směru x, tedy dn_y/dx, musí být *rovna nule*. To proto, že dvě vlny, šířící se *podél* rozhraní po jeho různých stranách těsně vedle sebe, musí mít stejné vlnové číslo, přestože se šíří v různých prostředích. Kdyby tomu tak nebylo, existoval by mezi nimi postupně narůstající fázový rozdíl (ve dvou bezprostředně sousedících bodech) a na rozhraní by byl skok fáze. To není možné.

V rovnici (2.3B.11b) položíme tedy $dn_y = 0$, ze získané rovnice vyjádříme $d\alpha$ a dosadíme do (2.3B.11a). Po malé úpravě je:

$$dn_x = \frac{dn}{\cos\alpha}. \qquad (2.3B.12)$$

Tento vztah je zajímavý. Ukazuje, že změna dn_x je *větší než změna indexu lomu dn* ve stejném místě. Další postup už je jednoduchý. Rovnici (2.3B.12) dělíme dx a upravíme: $dn_x/dx = dn_x/ds\ ds/dx = dn_x/ds\ 1/\cos(\alpha)$. Člen $\cos(\alpha)$ se zkrátí a získáme vztah (2.3B.9a).

Konkrétní použití rovnic (2.3B.9) a (2.3B.10) si teď ukážeme na příkladu.

Mějme dvojrozměrné prostředí (x, y), ve kterém se permitivita ε, a tudíž i index lomu n spojitě mění podél souřadnice y dle funkce $n(y)$; podél souřadnice x je index lomu neměnný. Protože $\partial n/\partial x = 0$, z rovnice (2.3B.9a) dostaneme:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{C}{n}, \qquad (2.3B.13)$$

kde C je integrační konstanta. Dosadíme do (2.3B.10), člen obsahující z vynecháme, protože úloha je dvojrozměrná, a získáme vztah

$$\frac{\partial y}{\partial s}=\sqrt{1-\left(\frac{C}{n}\right)^2}. \qquad (2.3B.14)$$

Dělením obou rovnic vyloučíme proměnnou s a dostáváme diferenciální rovnici paprsku:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{C}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{C}{n}\right)^2}}. \qquad (2.3B.15)$$

Dosadíme konkrétní funkci $n(y)$ a integrujeme (analyticky nebo numericky). Výsledkem je rovnice paprsku $y = f(x)$. Integrační konstantu C určíme z okrajové podmínky, často ze známého směru paprsku v některém bodě. Jestliže v tom bodě (např. A) známe i hodnotu eikonály L_A, můžeme nyní vypočítat její hodnotu v kterémkoli jiném bodě (např. B) na tomtéž paprsku. Podle rovnice (2.3B.5) je

$$L_B = L_A + \int_A^B n\,ds, \qquad (2.3B.16)$$

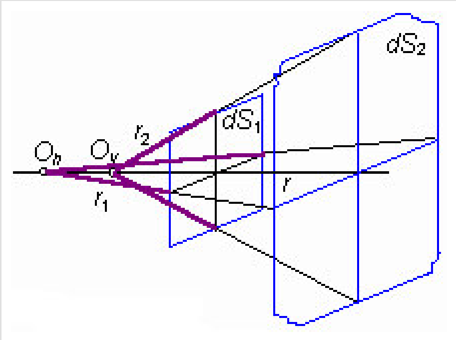
když integrační cesta vede podél paprsku. V naší úloze nahradíme diferenciál ds diferenciálem dy podle (2.3B.14), za n dosadíme $n(y)$ a integrujeme podle y od y_A do y_B. [Konec příkladu]

Ve vrstvě A jsme již poznali, že geometrická optika umožňuje počítat, jak se mění při šíření amplituda intenzity pole. Předpokladem ale je, že umíme počítat tvar (průběh) paprsků, tedy trajektorie vlnění. Výpočet intenzity vychází z toho, že energie vlnění se šíří *podél* paprsků, nikoli napříč. To znamená na příklad, že stěnami trubice, která vznikne vykreslením mnoha těsně sousedících paprsků a jejímž příčným řezem je uzavřená křivka, žádná elektromagnetická energie nevystupuje ani nevstupuje. Energie se šíří jen uvnitř trubice podél paprsků. Z této představy byl ve vrstvě A odvozen vztah

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}|E_1|^2 dS_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}|E_2|^2 dS_2. \qquad (2.3B.17)$$

Rovnice (2.3B.17) neplatí tam, kde se paprsky protínají (dostali bychom nekonečně velkou intenzitu pole). Taková situace nastává v ohnisku a na kaustice, kde se musí počítat jinak. Pojem kaustika je vysvětlen níže.

Někdy mohou mít paprsky v různých rovinách různé poloměry křivosti svých vlnoploch (jsou to např. *astigmatické paprsky*). Část paprskové trubice takového paprsku je nakreslena na obr. **2.3B.2**.



Obr. 2.3B.2 *Astigmatický paprsek*

Střed křivosti vlnoplochy v horizontální rovině je O_h, ve vertikální O_v. Vzdálenosti plošky dS_1 od jednoho a druhého ohniska (O_h, O_v) jsou r_1 a r_2, r je vzdálenost mezi ploškami dS_1 a dS_2.

Z obr. **2.3B.2** plyne:

$$dS_1 = r_1 d\alpha r_2 d\beta, \quad dS_2=(r_1+r)d\alpha(r_2+r)d\beta.$$

Dělením rovnic vyjádříme poloměr obou plošek a z rovnice (2.3B.17) vypočteme poměr intenzit. Pro homogenní prostředí při respektování změny fáze dostaneme:

$$E_2=E_1\sqrt{\frac{r_1r_2}{(r_1+r)(r_2+r)}}\exp(-jkr). \qquad (2.3B.18)$$

Popsané metody geometrické optiky s výhodou využijeme při vyšetřování šíření elektromagnetického vlnění prostředím, které svou strukturou odpovídá idealizované ionosférické vrstvě (nehledíme-li na měřítkový faktor). Vlnění z bodového zdroje se šíří nejprve prostředím s relativní permitivitou ε_r = 1 a pak vstupuje do vrstvy, ve které permitivita nejprve klesá do jistého minima a pak opět roste k hodnotě 1. Pro daný průběh permitivity ve vrstvě a danou polohu zdroje vypočítáme numerickou integrací trajektorii vlnění, vlnoplochu a přírůstek eikonály.

Pod vrstvou, kde se šíří (v důsledku zakřivení trajektorií) několik vln, můžeme pro každou vlnu zjistit směr šíření, intenzitu pole a eikonálu (fázi). Při výpočtu zjistíme, že v jisté části prostoru se paprsky otáčejí pěknými obloučky zpět dolů. Vrcholky těchto obloučků je možné spojit myšlenou křivkou, přes kterou žádný paprsek nepřejde a (těsně) pod kterou se dva sousední paprsky protínají. Tato křivka (v prostoru plocha) se nazývá kaustika.