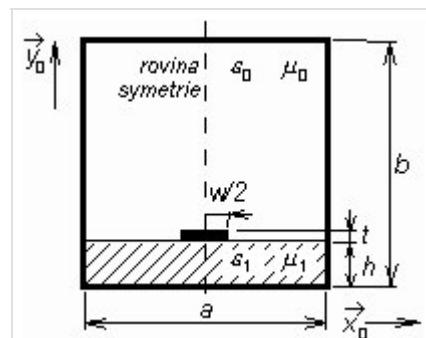


3.2 Stíněné mikropáskové vedení

Podrobnější popis

V tomto článku se budeme zabývat detaily výpočtu rozložení elektromagnetického pole v **mikropáskovém stíněném vedení** (obr. 3.2B.1), u něhož se parametry ve směru podélné osy nemění. Potom nám totiž stačí analyzovat jen dvojrozměrnou strukturu (příčný průřez vedením), což výrazně zjednodušuje výpočet [20]. Pro analýzu přitom využijeme **vlnovou metodu** (*full-wave methods*), **metodu konečných prvků**.

Jak jsme si uvedli ve **vrstvě A**, vyjdeme přitom z Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru, a předpokládáme, že zdroje elektromagnetického pole jsou umístěny ve velké vzdálenosti od oblasti, v níž provádíme výpočet (pak jsou v oblasti analýzy vnučené proudy \mathbf{J}_s nulové), že je v dielektriku obklopujícím mikropásek nulová objemová hustota náboje ρ , že prostředí ve stínicím vlnovodu je lineární a izotropní (permitivita a permeabilita jsou skaláry, jejichž hodnota nezávisí na velikosti příslušné intenzity), že dielektrikum vykazuje elektrické ztráty (reprezentováno měrnou elektrickou vodivostí σ) a že všechny kovové části (stínící vlnovod, mikropásek) jsou dokonalými elektrickými vodiči.



Obr. 3.2B.1 Stíněné mikropáskové vedení (podélně homogenní)

Analýzované **mikropáskové vedení** umístíme do **kartézského souřadného systému** (souřadnice x a y v příčném směru, souřadnice z podélná). Potom můžeme říci, že se elektromagnetická vlna bude ve struktuře šířit ve směru podélné osy z (podél mikropásku) a že závislost vektoru elektrické intenzity na této podélné souřadnici bude popsána vztahem

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)\exp(-\gamma z), \quad (3.2B.1)$$

kde γ je **konstanta šíření** (*propagation constant*).

Vyjádříme-li všechny vektory jako součet vektoru příčného (index t jako *transversal*) a vektoru podélného (index z podle podélné osy), dostáváme

$$\nabla_t \times (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) - \gamma(\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) = k_0^2 \mu_r \tilde{\epsilon}_r \mathbf{E}_t, \quad (3.2B.2a)$$

$$\nabla_t \times [(\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) \times \mathbf{z}_0] = k_0^2 \mu_r \tilde{\epsilon}_r E_z \mathbf{z}_0. \quad (3.2B.2b)$$

Zatímco (3.2B.2a) je vektorovou rovnicí pro příčné složky vektorů, (3.2B.2b) je skalární rovnicí pro podélné složky vektorů. V těchto vztazích značí ∇_t příčný operátor *nabla*, \mathbf{E}_t je příčný vektor elektrické intenzity, γ je **konstanta šíření**, E_z značí podélnou složku vektoru elektrické intenzity, k_0 je **vlnové číslo** ve vakuu, μ_r značí relativní permeabilitu uvnitř struktury, $\tilde{\epsilon}_r$ je komplexní relativní permitivita uvnitř struktury a \mathbf{z}_0 značí jednotkový vektor v podélném směru.

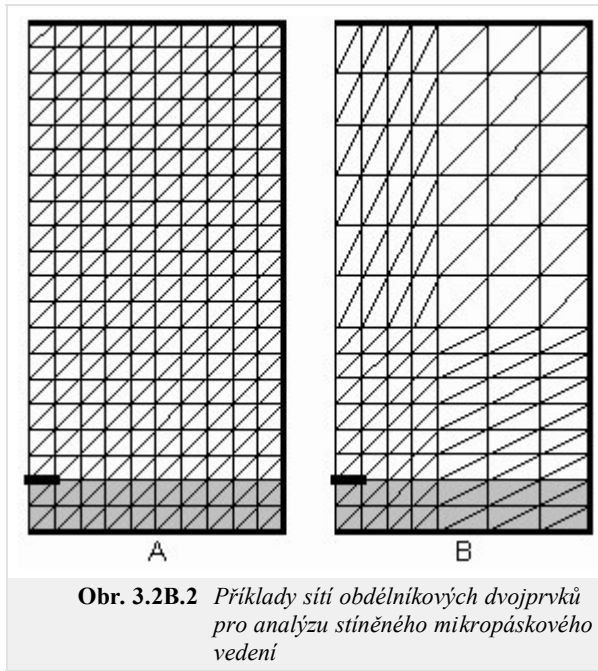
Soustavu diferenciálních rovnic (3.2B.2) musíme doplnit okrajovými podmínkami, kterým musí řešení soustavy (3.2B.2) vyhovovat

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_t = 0 \\ E_z = 0 \end{array} \right\} \text{na } \Gamma_1, \quad (3.2B.3a)$$

$$\left. \begin{array}{l} [\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t] \cdot \mathbf{n}_0 = 0 \\ \nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0 \end{array} \right\} \text{na } \Gamma_2. \quad (3.2B.3b)$$

Rovnice (3.2B.2), doplněné **okrajovými podmínkami** (3.2B.3), budou výchozími vztahy pro vlnovou analýzu našeho **stíněného mikropáskového vedení**. Musíme si však uvědomit, že v soustavě (3.2B.2), (3.2B.3) máme zahrnutu pouze první a druhou Maxwellovu rovnici. Aby řešení automaticky vyhovovalo i třetí a čtvrté Maxwellově rovnici, musíme pracovat s tzv. **hybridními konečnými prvky**.

Při analýze stíněného mikropáskového vedení pomocí **hybridních konečných prvků** musíme zahrnout do výpočtů všechny složky elektrické intenzity nebo všechny složky intenzity magnetické. Výchozím vztahem analýzy přitom je (3.2B.2).



Obr. 3.2B.2 Příklady sítí obdélníkových dvojprvků pro analýzu stíněného mikropáskového vedení

Podstata **hybridních konečných prvků** spočívá v modelování podélné složky elektrické nebo magnetické intenzity pomocí **uzlové aproximace** a v modelování příčných složek elektrické nebo magnetické intenzity pomocí aproximace, založené na **hranových vektorech** (*edge vectors*).

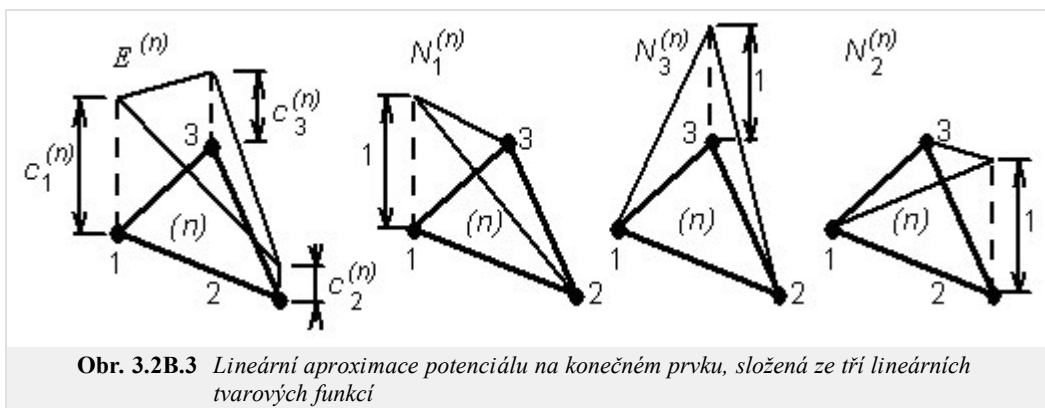
V prvním kroku **metody konečných prvků** je třeba analyzovanou oblast (v našem případě průřez mikropáskového stíněného vedení) rozdělit na **konečné prvky** (podoblasti, které se navzájem nepřekrývají a jejichž sjednocení dává celou analyzovanou oblast). V prostoru konečného prvku musejí být parametry analyzované struktury (permitivita, permeabilita, vodivost) konstantní. Na velikost a na tvar konečných prvků přitom nejsou kladena žádná omezení. Příklady sítí pro naše stíněné mikropáskové vedení jsou nakresleny na obr. 3.2B.2.

V druhém kroku řešení formálně vyjádříme aproximaci hledané neznámé funkce nad celou plochou jednoho každého **konečného prvku**. Obvykle přitom neznámé řešení aproximujeme lineární kombinací zvolených aproximačních funkcí a neznámých aproximačních koeficientů.

V případě našeho mikropáskového vedení musíme vyjádřit formální aproximaci skalární funkce $E_z = E_z(x,y)$ a aproximaci funkce vektorové $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_t(x,y)$. Začneme funkcí skalární.

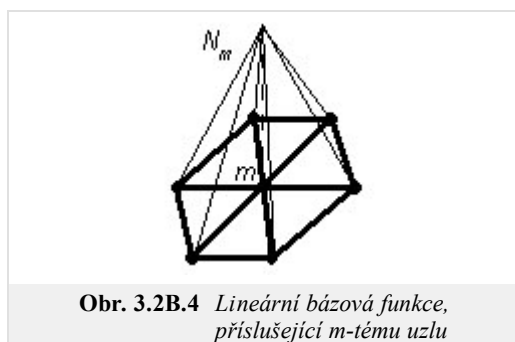
Globální aproximaci skalární funkce E_z v celém průřezu mikropáskového vedení budeme sestavovat z lokálních aproximací na jednotlivých **konečných prvcích**.

Lokální aproximaci podélné složky vektoru elektrické intenzity na **konečném prvku** vyjádříme jako **lineární kombinaci** zvolených aproximačních funkcí a neznámých aproximačních koeficientů. V případě lineární aproximace sestavíme aproximační funkci nad trojúhelníkovým konečným prvkem jako lineární kombinaci tří dílčích lineárních funkcí (tří rovin). Každá dílčí lineární funkce nabývá v jednom vrcholu trojúhelníkového konečného prvku jednotkové hodnoty (každá funkce vždy v jiném vrcholu) a nulové hodnoty ve zbývajících dvou vrcholech (viz obr. 3.2B.3, druhý až čtvrtý obrázek zleva). Koeficienty c_n u dílčích funkcí v lineární kombinaci budou mít pak význam prostorových vzorků hledané funkce ve vrcholech konečného prvku (obr. 3.2B.3). O vrcholech konečného prvku budeme v dalším hovořit o vrcholech jako o **uzlech** (*nodes*) a o funkčních hodnotách potenciálu v těchto bodech jako o **hodnotách uzlových** (*nodal values*).



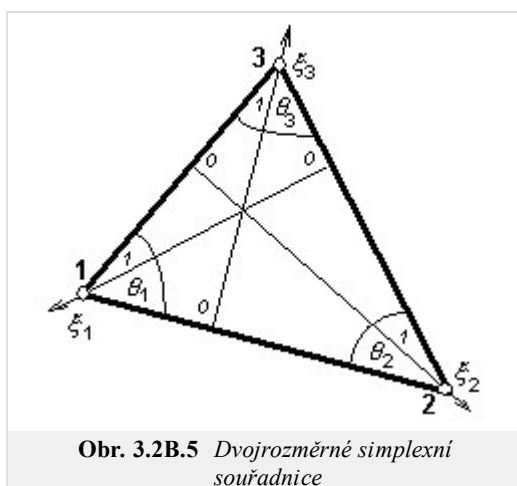
Obr. 3.2B.3 Lineární aproximace potenciálu na konečném prvku, složená ze tří lineárních tvarových funkcí

Dílčím aproximačním funkcím říkáme **funkce tvarové** (*shape functions*), neboť jejich průběh (*tvar*), jenž závisí na stupni aproximačního polynomu, ovlivňuje i průběh výsledné aproximace. Všechny tvarové funkce, které nabývají jednotkové hodnoty ve stejném uzlu (viz obr. 3.2B.4), pak společně tvoří **funkci báзовou** (*basis function*).



Obr. 3.2B.4 Lineární básová funkce, příslušející m-tému uzlu

V mnoha případech je výhodnější použít aproximační funkce vyšších řádů. I když u aproximací vyšších řádů musí trojúhelníkový prvek obsahovat více uzlů (6 u kvadratické aproximace, 10 u aproximace kubické, atd.), obvykle dosáhneme stejné chyby řešení jako u lineární aproximace při využití podstatně nižšího počtu **konečných prvků**. Aproximační funkce vyšších řádů mají totiž *hladší průběh*, takže lépe odpovídají průběhům veličin v přírodě kolem nás.



Obr. 3.2B.5 Dvozměrné simplexní souřadnice

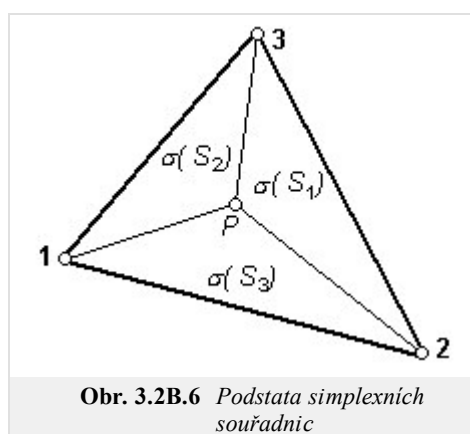
Nyní, když víme, co jsou to **tvárové funkce** a jak vypadají, pokusíme se pro ně najít vhodné matematické vyjádření. Nejčastěji se k tomuto účelu využívají tzv. **Lagrangeovy polynomy**, vyjádřené pomocí **simplexních souřadnic** [21].

Začněme vysvětlením pojmu simplexní souřadnice (*simplex coordinates*). V případě trojúhelníkových **konečných prvků** mají simplexní souřadnicové osy směr výšek trojúhelníka. Simplexní souřadnice nabývají hodnoty 1 ve vrcholu trojúhelníka a hodnoty 0 na protilehlé straně trojúhelníka. Simplexní souřadnice nezávisí na tvaru ani na velikosti trojúhelníkového prvku, a proto lze všechny potřebné výpočty provést v simplexních souřadnicích pouze pro jediný konečný prvek a získané výsledky pak přepočíst pro konečné prvky ostatní.

Co se týká fyzikální podstaty simplexních souřadnic, obecný bod P na ploše trojúhelníkového prvku rozděluje tuto plochu na tři dílčí trojúhelníky (obr. 3.2B.6). Podíl obsahu dílčího trojúhelníka, ležícího proti prvnímu uzlu, k obsahu celého trojúhelníkového konečného prvku, udává souřadnici bodu P na první simplexní souřadné ose

$$\xi_1 = \frac{\sigma(S_1)}{\sigma(S)}, \quad (3.2B.4)$$

přičemž se zbývajícími simplexními souřadnými osami je to podobné. Ve vztahu (3.2B.4) značí $\sigma(S_1)$ obsah dílčího trojúhelníka, ležícího proti prvnímu uzlu, a $\sigma(S)$ symbolizuje obsah celého trojúhelníkového konečného prvku. Je tudíž zřejmé, že součet všech tří simplexních souřadnic v libovolném bodě trojúhelníkového konečného prvku musí být roven jedné



Obr. 3.2B.6 Podstata simplexních souřadnic

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1. \quad (3.2B.5)$$

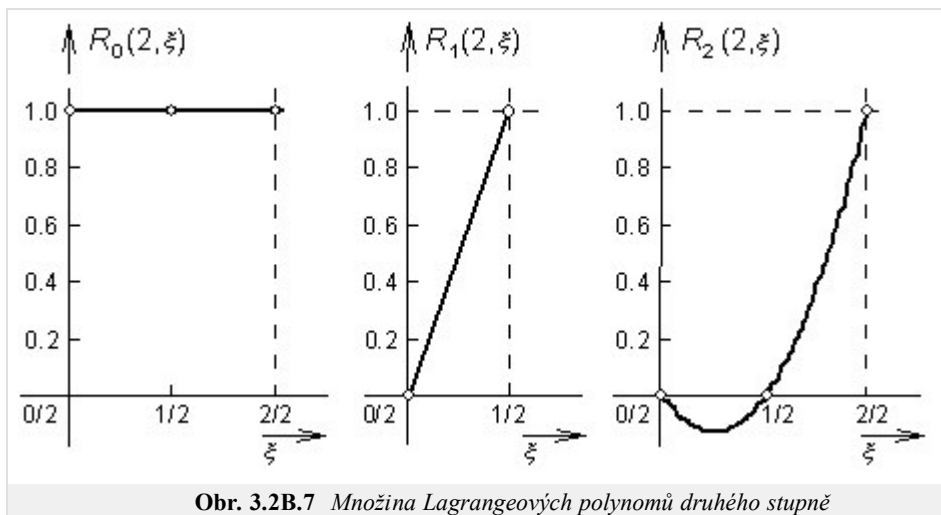
A jak je ukázáno v [21], tento výrok lze zobecnit pro libovolnou dimenzi a pro libovolný stupeň aproximačního polynomu.

Nyní, když máme jasno v simplexních souřadnicích, můžeme se vrátit k **Lagrangeovým interpolačním polynomům**.

Lagrangeův polynom n -tého stupně obecně vyjádříme pomocí simplexní souřadnice ξ vztahem

$$R_m(n, \xi) = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (n\xi - k) \quad m \geq 1 \quad R_0(n, \xi) = 1, \quad (3.2B.6)$$

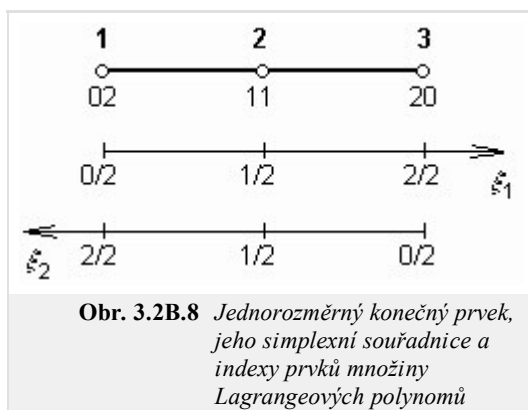
kde n je stupeň aproximačního polynomu. Vztah (3.2B.6) přitom popisuje najednou celou množinu polynomů, přičemž jednotlivé prvky této množiny se liší indexem m , který může nabývat hodnot od nuly po stupeň polynomu n .



Obr. 3.2B.7 Množina Lagrangeových polynomů druhého stupně

Nuly polynomů $R_m(n)$ jsou ekvidistantně rozmístěny na souřadnicích $\xi = 0, 1/n$ až $(m-1)/n$, jednotkové hodnoty polynom nabývá v $\xi = m/n$. Tudiž, $R_m(n)$ má m ekvidistantně rozmístěných nul nalevo od souřadnice $\xi = m/n$ a žádnou napravo.

Výše uvedené konstatování je ilustrováno obrázkem 3.2B.7, v němž jsou vykresleny prvky množiny kvadratických polynomů $R(2)$. Z obrázků je zřejmé výše popsané ekvidistantní rozmístění nul. Prvek množiny s indexem 0, tj. $R_0(2)$ nemá žádnou nulu nalevo od souřadnice 0 a nabývá jednotkové hodnoty na souřadnici 0. Prvek množiny s indexem 1, tj. $R_1(2)$, má jednu nulu na souřadnici 0 a nabývá jedničky v $1/2$. Konečně prvek množiny s indexem 2, tj., $R_2(2)$, má nuly na souřadnicích 0 a $1/2$ a je jednotkový na souřadnici 1.



Obr. 3.2B.8 Jednorozměrný konečný prvek, jeho simplexní souřadnice a indexy prvků množiny Lagrangeových polynomů

Nyní z právě zavedených **Lagrangeových polynomů** sestavíme kvadratické tvarové funkce pro jednorozměrný konečný prvek. **Simplexní souřadnice** ξ_1 bude na tomto prvku orientována zleva doprava, souřadnice ξ_2 půjde zprava doleva (obr. 3.2B.8). Tvarovou funkci uzlu 1 (jednotková hodnota v uzlu 1, nulová hodnota v uzlech 2 a 3) pak nejsnáze vytvoříme vynásobením Lagrangeova polynomu proměnné ξ_1 s indexem 0 (konstantní funkce s hodnotou 1) Lagrangeovým polynomem proměnné ξ_2 s indexem 2 (jelikož souřadnice ξ_2 je orientována zprava doleva, musíme průběh funkce $R_2(2)$ z obr. 3.2B.7 zrcadlově otočit v horizontálním směru).

Obdobným způsobem můžeme postupovat i při vytváření tvarových funkcí pro uzly 2 a 3. V případě uzlu 2 bychom vzájemně násobili **Lagrangeovy polynomy** proměnných ξ_1 a ξ_2 s indexem 1, v případě uzlu 3 je zapotřebí vynásobit Lagrangeův polynom proměnné ξ_1 s indexem 2 Lagrangeovým polynomem proměnné ξ_2 s indexem 0.

Indexy Lagrangeových polynomů, tvořících tvarové funkce jednotlivých uzlů, jsou u těchto uzlů zapsány i v obr. 3.2B.8, a to ve formě čísel sestávajících ze dvou číslic; první číslice je index Lagrangeova polynomu souřadnice ξ_1 , druhá číslice potom odpovídá indexu Lagrangeova polynomu souřadnice ξ_2 . Součet těchto číslic musí být vždy roven stupni aproximačního polynomu n .

Obecně tedy můžeme tvarovou funkci uzlu (i, j) jednorozměrného konečného prvku vyjádřit vztahem

$$\alpha_{ij} = R_i(n, \xi_1)R_j(n, \xi_2) \quad i + j = n, \tag{3.2B.7a}$$

kde n je stupeň aproximačního polynomu, R značí **Lagrangeovy polynomy**, definované vztahem (3.2B.5) a ξ jsou **simplexní souřadnice**.

V dalším kroku přejdeme k dvojrozměrnému **konečnému prvku**. Jedinou změnou, ke které v tomto případě dojde, je přidání nové simplexní souřadnice ξ_3 ke dvěma souřadnicím stávajícím ξ_1 a ξ_2 . Ke dvěma činitelům, vystupujícím ve vztahu pro **tvarové funkce** na jednorozměrném prvku, pak tedy stačí přidat třetí činitel, odpovídající **Lagrangeově polynomu** nové **simplexní souřadnice** ξ_3

$$\alpha_{ijk} = R_i(n, \xi_1)R_j(n, \xi_2)R_k(n, \xi_3) \quad i + j + k = n. \tag{3.2B.7b}$$

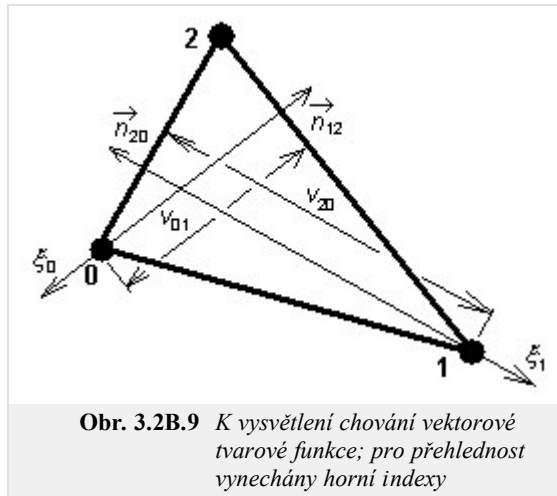
Ve výše uvedeném vztahu značí ξ_1, ξ_2 a ξ_3 **simplexní souřadnice** dvojrozměrného **konečného prvku**, n je stupeň aproximačního polynomu a R jsou Lagrangeovy polynomy.

Dosazením do vztahů (3.2B.6) a (3.2B.7) dostáváme pro lineární aproximaci **tvarové funkce**

$$\alpha_{100} = N_1^{(n)} = \xi_1, \quad \alpha_{010} = N_2^{(n)} = \xi_2, \quad \alpha_{001} = N_3^{(n)} = \xi_3. \tag{3.2B.8}$$

Nyní, když jsme se seznámili s bázovými funkcemi pro aproximaci skalární funkce E_z , věnujme se aproximaci vektorové funkce \mathbf{E}_t . Aproximace vektorové funkce formálně odpovídá aproximaci funkce skalární, jen bázové funkce jsou funkcemi vektorovými

$$\mathbf{E}_t^{(n)} = \mathbf{N}_{t,01}^{(n)} e_{t,01}^{(n)} + \mathbf{N}_{t,12}^{(n)} e_{t,12}^{(n)} + \mathbf{N}_{t,20}^{(n)} e_{t,20}^{(n)} = \sum_{i,j} \mathbf{N}_{t,ij}^{(n)} e_{t,ij}^{(n)}. \quad (3.2B.9)$$



Obr. 3.2B.9 K vysvětlení chování vektorové tvarové funkce; pro přehlednost vynechány horní indexy

Ve vztahu (3.2B.9) značí $e_{t,01}^{(n)}$ **hranový aproximační koeficient** pro aproximaci rozložení příčných složek vektoru elektrické intenzity, který náleží k hraně 0-1 n -tého **konečného prvku**. Dále, symbol $\mathbf{N}_{t,01}^{(n)}$ značí vektorovou tvarovou funkci, kterou násobíme hranový koeficient 0-1, abychom dostali příspěvek tohoto koeficientu k aproximaci rozložení příčných složek elektrické intenzity na ploše n -tého konečného prvku. Obdobně je tomu i u zbývajících dvou vektorových tvarových funkcí.

Pro vektorové **tvarové funkce** přitom platí

$$\mathbf{N}_{t,ij}^{(n)} = -\zeta_i \frac{l_{k,i}^{(n)}}{2A^{(n)}} \mathbf{n}_{k,i}^{(n)} + \zeta_j \frac{l_{j,k}^{(n)}}{2A^{(n)}} \mathbf{n}_{j,k}^{(n)}, \quad (3.2B.10)$$

kde $A^{(n)}$ značí plochu n -tého **konečného prvku**, $l_{k,i}^{(n)}$ je délka hrany k - i n -tého konečného prvku, $\mathbf{n}_{k,i}^{(n)}$ je normála k hraně k - i n -tého konečného prvku a ζ_i je klasická **simplexní souřadnice**, která nabývá jednotkové hodnoty v uzlu i a je nulová na protilehlé hraně. Význam ostatních symbolů je pak obdobný.

Podívejme se blíže na chování **tvarové funkce** (2.3B.10) v uzlu 0. Zde **simplexní souřadnice** ζ_0 nabývá jednotkové hodnoty a ζ_1 je nulová. V uzlu 0 má tedy tvarová funkce (2.3B.10) směr normály k hraně 2-0, orientované dovnitř **konečného prvku** (důsledek záporného znaménka) a její velikost je rovna obrácené hodnotě výšky v_{20} . Co se týká chování v uzlu 1, zde má tvarová funkce směr a orientaci normály k hraně 1-2 a její velikost je rovna převrácené hodnotě výšky v_{01} . Při pohybu z uzlu 0 do uzlu 1 po hraně 0-1 se tedy směr tvarové funkce (2.3B.10) plynule mění z $-\mathbf{n}_{01}^{(n)}$ na $+\mathbf{n}_{12}^{(n)}$ a jeho velikost z hodnoty $(1/v_{20})$ na $(1/v_{01})$. A jelikož tvarová funkce (2.3B.10) nezávisí na souřadnici ζ_2 , je popsané chování funkce stejné i na všech rovnoběžkách s hranou 0-1.

Nyní, když máme formálně aproximovány všechny složky vektoru elektrické intenzity, můžeme pokračovat ve zbývajících krocích **metody konečných prvků**. Těmi kroky je dosažení aproximace do řešené rovnice, vyjádření chyby (rozdíl mezi aproximací řešení a řešením přesným) a její minimalizace. Provedením těchto kroků dospějeme k výsledné maticové rovnici

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_t^{(n)} - k_0^2 \mu_r^{(n)} \tilde{\epsilon}_r^{(n)} \mathbf{T}_t^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_t^{(n)} \\ \mathbf{E}_z^{(n)} \end{bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_t^{(n)} & \mathbf{G}^{(n)} \\ \mathbf{G}^{(n)T} & \mathbf{S}_z^{(n)} - k_0^2 \mu_r^{(n)} \tilde{\epsilon}_r^{(n)} \mathbf{T}_z^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_t^{(n)} \\ \mathbf{E}_z^{(n)} \end{bmatrix},$$

kde

$$\mathbf{T}_t^{(n)} \mathbf{E}_t^{(n)} = \sum_{i,j} \left\{ e_{t,ij}^{(n)} \iint_{S^{(n)}} \left[\mathbf{N}_{t,rs}^{(n)} \cdot \mathbf{N}_{t,ij}^{(n)} \right] dS \right\}, \quad (3.2B.11a)$$

$$\mathbf{G}^{(n)} \mathbf{E}_z^{(n)} = \sum_m \left\{ e_{z,m}^{(n)} \iint_{S^{(n)}} \left[\mathbf{N}_{t,rs}^{(n)} \cdot \left(\nabla_t N_{z,m}^{(n)} \right) \right] dS \right\}, \quad (3.2B.11b)$$

$$\mathbf{S}_z^{(n)} \mathbf{E}_z^{(n)} = \sum_m \left\{ e_{z,m}^{(n)} \iint_{S^{(n)}} \left[\left(\nabla_t N_{z,q}^{(n)} \right) \cdot \left(\nabla_t N_{z,m}^{(n)} \right) \right] dS \right\}, \quad (3.2B.11c)$$

$$\mathbf{T}_z^{(n)} \mathbf{E}_z^{(n)} = \sum_m \left\{ e_{z,m}^{(n)} \iint_{S^{(n)}} \left[N_{z,q}^{(n)} N_{z,m}^{(n)} \right] dS \right\}, \quad (3.2B.11d)$$

$$\mathbf{S}_t^{(n)} \mathbf{E}_t^{(n)} = \sum_{i,j} \left\{ e_{t,ij}^{(n)} \iint_{S^{(n)}} \left[\left(\nabla_t \times \mathbf{N}_{t,rs}^{(n)} \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_{t,ij}^{(n)} \right) \right] dS \right\}. \quad (3.2B.11e)$$

Ve výše uvedených vztazích je $\mathbf{E}_t^{(n)}$ sloupcový vektor tří neznámých **hranových aproximačních koeficientů** (pro aproximaci příčných složek vektoru elektrické intenzity) na ploše n -tého **konečného prvku** a $\mathbf{E}_z^{(n)}$ značí sloupcový vektor tří neznámých **uzlových aproximačních koeficientů** (pro aproximaci podélné složky vektoru elektrické intenzity) opět na n -tém konečném prvku. Dále, γ značí **komplexní konstantu šíření**, k_0 je **vlnové číslo** ve vakuu, $\mu_r^{(n)}$ je relativní permeabilita n -tého konečného prvku a $\tilde{\epsilon}_r^{(n)}$ je komplexní relativní permitivita téhož prvku. Symbol dS značí elementární plošku pro integraci po ploše n -tého konečného prvku a symbol $S^{(n)}$ vyjadřuje celkovou plochu n -tého konečného prvku. Suma se sčítacím indexem m symbolizuje sčítání přes všechny uzly konečného prvku (tj. $m = 0, 1, 2$) a suma s indexy i, j znamená sčítání přes všechny hrany prvku (tj. $i, j = 0-1, 1-2, 2-0$). Symboly $e_{t,ij}^{(n)}$ jsou hranové aproximační koeficienty, symboly $e_{z,m}^{(n)}$ jsou aproximační koeficienty uzlové.

Matice $\mathbf{T}_t^{(n)}$, $\mathbf{G}^{(n)}$, $\mathbf{S}_z^{(n)}$, $\mathbf{T}_z^{(n)}$ a $\mathbf{S}_t^{(n)}$ jsou matice koeficientů n -tého konečného prvku o rozměru 3×3 . Elementy zmíněných matic byly vypočteny integrací součinu **bázových a váhových funkcí** (nebo jejich derivací) na ploše n -tého **konečného prvku** (samozřejmě v **simplexních souřadnicích**). Tyto matice můžeme vyčíslit pomocí následujících vztahů

$$\mathbf{S}_t^{(n)} = \frac{1}{A^{(n)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2B.12a)$$

$$\mathbf{T}_t^{(n)} = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^2 \mathbf{Q}_i \cotg \left[\theta_i^{(n)} \right], \quad (3.2B.12b)$$

$$\mathbf{G}^{(n)} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^2 \mathbf{C}_i \cotg \left[\theta_i^{(n)} \right], \quad (3.2B.12c)$$

$$\mathbf{S}_z^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \mathbf{D}_i \cotg \left[\theta_i^{(n)} \right], \quad (3.2B.12d)$$

$$\mathbf{T}_z^{(n)} = \frac{A^{(n)}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.2B.12e)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{Q}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{Q}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{D}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$A^{(n)}$ je plocha n -tého **konečného prvku** a $\theta_i^{(n)}$ je úhel u i -tého vrcholu n -tého konečného prvku. Uvedené vztahy přitom platí pro následující organizaci uzlů a hran

$$\mathbf{E}^{(n)} = \begin{bmatrix} e_{z,0}^{(n)} & e_{z,1}^{(n)} & e_{z,2}^{(n)} & e_{t,12}^{(n)} & e_{t,20}^{(n)} & e_{t,01}^{(n)} \end{bmatrix}^T. \quad (3.2B.12f)$$

Vyřešením maticové rovnice pro vektor neznámých aproximačních koeficientů získáme řešení problému. Dosazením aproximačních koeficientů do formální aproximace dostaneme *skutečnou* aproximaci hledané funkce v každém bodě n -tého **konečného prvku**, sjednocením aproximací nad všemi konečnými prvky pak získáme globální aproximaci ve všech bodech prostoru, nad kterým jsme hledali řešení zadané parciální diferenciální rovnice.

Ve [vrstvě C](#) nabízíme čtenáři matlabovský program, který pomocí právě popsané verze metody konečných prvků analyzuje stíněné mikropáskové vedení. Praktický programátorský popis programu uvádíme ve [vrstvě D](#).