

## 4.5 Flíčková anténa

### Podrobnější popis

V tomto odstavci se budeme věnovat momentové analýze dvojrozměrné mikropáskové antény. V podstatě se jedná o rozšíření postupu, popsaného v čl. 4.4, na další rozměr.

Jak již bylo řečeno, potřebujeme vyjádřit intenzitu elektrického pole pomocí proudů a nábojů na buňkách. Učiníme tak prostřednictvím vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$  a potenciálu skalárního  $\varphi$ ; oproti předchozím článkům uvažujeme pozitivní konvenci, tj.  $\exp(+jkr)$

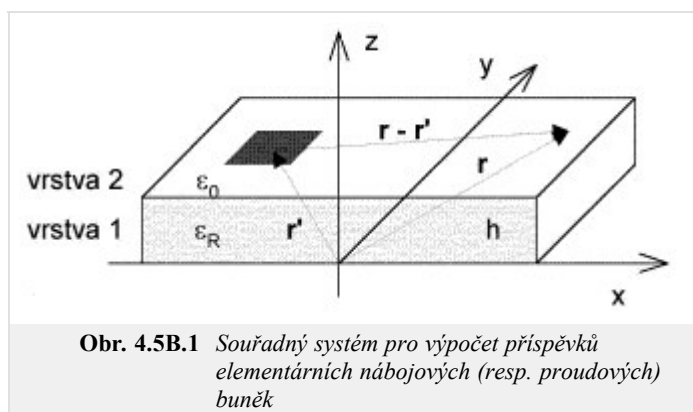
$$\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{A} - \nabla\varphi. \quad (4.5B.1)$$

Vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  a skalární potenciál  $\varphi$  elementárních plošných proudů a nábojů přitom fyzikálně představují příspěvky těchto zdrojů k elektrickému poli v určitém bodě.

Matematicky není snadné tyto potenciály získat, neboť jsou řešením tzv. Sommersfeldových integrálů. Pro některé jednoduché případy se však dají sestavit na základě fyzikálního pohledu na věc. Takový přístup uplatníme i zde.

Uvažujme případ, kdy máme dvojrozměrný motiv anténního prvku nad zemní plochou (obr. 4.5B.1). Předpokládáme (pro tuto chvíli) relativní permitivitu dielektrika rovnu jedné a počítáme příspěvek elementární proudové a nábojové plošky v bodě  $\mathbf{r}'$  k intenzitě v bodě  $\mathbf{r}$ . Použijeme Coulombova (resp. Biot-Savartova) zákona s respektováním odrazu od zemní plochy (princip zrcadlení).

Tím dostaneme



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\exp(-jkr_0)}{r_0} - \frac{\exp(-jkr_1)}{r_1} \right] d\mathbf{r}',$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\exp(-jkr_0)}{r_0} - \frac{\exp(-jkr_1)}{r_1} \right] d\mathbf{r}',$$

kde pro vzdálenosti  $r_0$  a  $r_1$  platí

$$r_0 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2h)^2}.$$

Zde  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $\mathbf{r}' = (x', y')$  a  $h$  představuje tloušťku substrátu.

Zahnutí vlivu dielektrika už je obtížnější. Fyzikální představa říká, že vlna může do cílového bodu  $\mathbf{r}$  přijít ne jednou, ale nekonečně mnoha cestami. V literatuře najdeme následující vztah:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1-\eta}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{\exp(-jk_0r_0)}{r_0} - (1+\eta) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\eta)^{i-1} \exp(-jk_0r_i)}{r_i} \right],$$

kde

$$\eta = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}, \quad r_i = \sqrt{x^2 + y^2 + (2ih)^2}$$

a  $\epsilon_r$  je relativní permitivita substrátu.

Vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  zůstane i po přidání dielektrika nezměněn.

V případě zdrojů konečné velikosti (tj. našich obdélníkových buněk) bude jejich příspěvek vyjádřen integrálně

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \iint_{\text{přes plochu buňky}} \mathbf{G}_A(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS', \quad (4.5B.2)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iint_{\text{přes plochu buňky}} \mathbf{G}_q(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) q(\mathbf{r}') dS'. \quad (4.5B.3)$$

Nyní je budeme věnovat diskretizaci rovnice (4.5B.2). Pro splnění tohoto úkolu musíme znát příspěvek libovolné proudové (resp. nábojové) buňky k potenciálu ve středu buňky jiné. Proto zavedeme označení

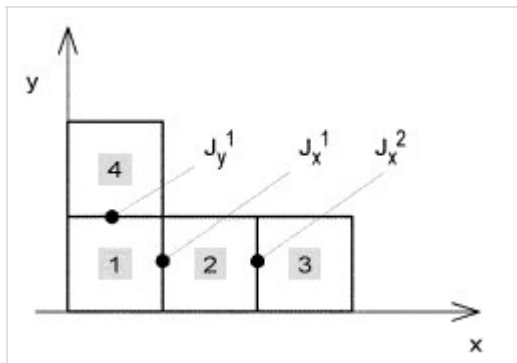
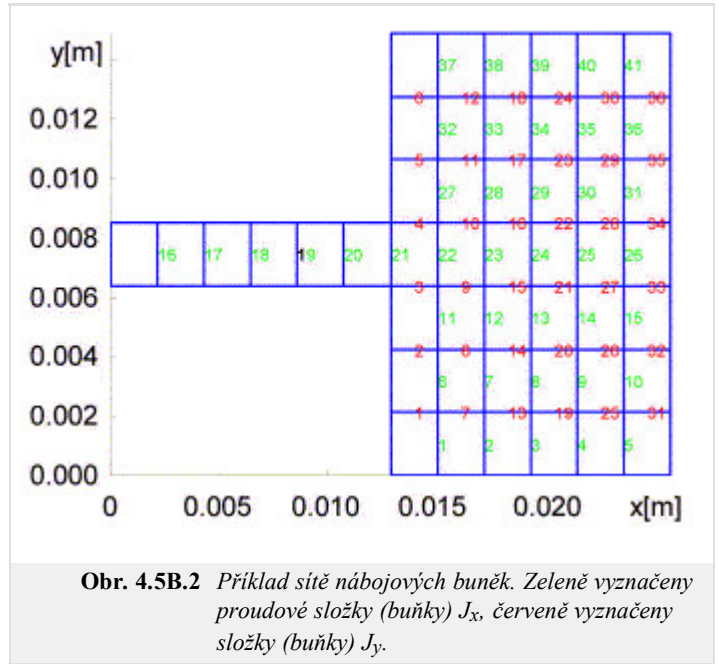
$$m_{ij}^{Ax} = \iint_{\text{přes plochu i-té buňky}} G_{xx}^A(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'|) J_x(\mathbf{r}') dS', \quad (4.5B.4a)$$

$$m_{ij}^{Ay} = \iint_{\text{přes plochu i-té buňky}} G_{yy}^A(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'|) J_y(\mathbf{r}') dS', \quad (4.5B.4b)$$

$$m_{ij}^{\varphi} = \iint_{\text{přes plochu i-té buňky}} G^q(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'|) \sigma(\mathbf{r}') dS'. \quad (4.5B.5)$$

Výraz  $m_{ij}^{Ax}$  říká jak  $j$ -tá **proudová buňka** pro složku  $x$  přispívá k **vektorovému potenciálu** ve středu  $i$ -té buňky. Podobně je tomu i u výrazu  $m_{ij}^{Ay}$  pro složku  $J_y$  a u výrazu  $m_{ij}^{\varphi}$  pro **skalární potenciál**. Jak jsme uvedli ve **vrstvě A**, jsou sítě **proudových buněk** a **buněk nábojových** navzájem posunuty o polovinu buňky, a používají tedy jiné číslování. Navíc proudové buňky mají nezávislé číslování pro složku  $J_x$  a pro složku  $J_y$ . Pro lepší představu číslování uvádíme na obr. 4.5B.2 síť nábojových buněk pro stejný případ, jako byl uveden na obr. 4.5A.3.

Pro účely sestavení rovnic pro neznámé proudové hodnoty je nutné mít k dispozici funkci, která vypočte příspěvky mezi dvěma libovolnými buňkami (stejného typu). Díky rozsahu tohoto článku není možné detailně popsat, jak taková funkce pracuje.



**Obr. 4.5B.3** Motiv typu hokejka. Nábojové buňky 1 až 4. Proudové uzlové hodnoty  $J_x^1, J_x^2, J_y^1$

Důležité však je, že před prvním voláním funkce se vypočtou jen všechny nutné příspěvky, neboť příspěvky některých buněk se opakují (např. buňky 1 a 2 pro složku  $J_x$  mají stejný příspěvek jako buňky 3 a 4). Tyto všechny vzájemné příspěvky se uloží do tzv. **momentové tabulky** (matice). Při každém dalším volání funkce se pouze čte tento příspěvek na odpovídajícím místě momentové matice.

Nyní se pokusíme o sestavení soustavy rovnic. Nebude zde však uveden obecný vztah pro obecný případ, ale bude ukázána konkrétní jednoduchá situace. V obr. 4.5B.3 je nakreslen motiv typu *hokejka*, který má čtyři **nábojové buňky** a tři **buňky proudové**

(z toho dvě buňky pro  $J_x$  a jednu buňku pro  $J_y$ ).

Nyní sestavíme rovnice pro intenzitu  $E_1^x$

$$E_1^x = -j\omega \sum_{j=1}^3 m_{1j}^{Ax} - \frac{1}{\Delta} \left[ -\frac{j}{\omega} \frac{J_1^x - 0}{\Delta x} + \frac{J_1^y - 0}{\Delta y} (m_{21}^{\varphi} - m_{11}^{\varphi}) - \frac{j}{\omega} \frac{0 - J_2^x}{\Delta x} + \frac{0 - 0}{\Delta y} (m_{23}^{\varphi} - m_{13}^{\varphi}) - \frac{j}{\omega} \frac{0 - 0}{\Delta x} + \frac{0 - J_2^y}{\Delta y} (m_{24}^{\varphi} - m_{14}^{\varphi}) \right].$$

První člen představuje příspěvek všech **proudových buněk** k proudové buňce  $J_x^1$ . Druhý člen je příspěvkem od **nábojových buněk**; výraz  $\{\}/\Delta x$  představuje náhradu derivace  $\partial\varphi/\partial x$  středovou diferencí (viz čl. 4.1). Obsahem složené závorky jsou čtyři členy, protože máme celkem čtyři nábojové buňky. Např. první člen představuje příspěvek první nábojové buňky do středu druhé buňky minus příspěvek první nábojové buňky do středu první buňky. Tj. první index u členů  $m$  je vždy střed cílové nábojové buňky, v níž příspěvek počítáme, a druhý index je pak index zdrojové nábojové buňky. Náboj sídlící v každé buňce je přitom spočten za pomoci proudových uzlových proudových hustot na stěnách s využitím **rovnice kontinuity**

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\sigma, \quad (4.5B.6)$$

kde  $\sigma$  je v našem případě plošná hustota náboje.

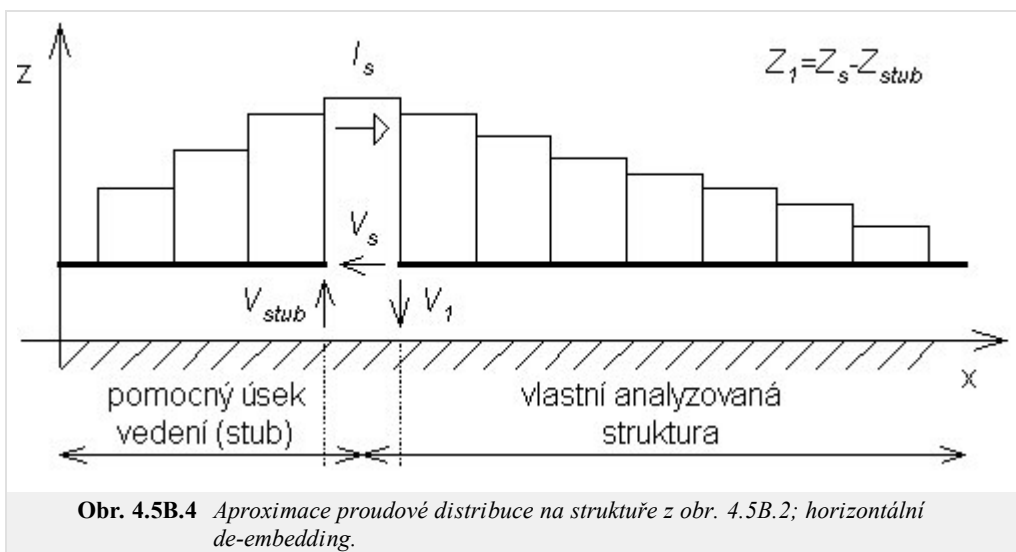
Podobným způsobem bychom sestavili rovnici pro intenzitu  $E_2^x$  a pro intenzitu  $E_1^y$ . Tolik tedy k sestavení rovnic. Dále se budeme věnovat buzení struktury.

Nejjednodušším způsobem buzení struktury je buzení rovinnou vlnou (viz čl. 4.4). Stačí totiž pro každou proudovou buňku položit  $E_x = -E_x^I$  a  $E_y = -E_y^I$ , kde  $E_x^I$  a  $E_y^I$  představují složky intenzity dopadající vlny. My však budeme budit anténu horizontálním napěťovým zdrojem. Situaci pro případ struktury z obr. 4.5B.2 ukazuje obrázek 4.5B.4.

V místě, kde byla v obr. 4.5B.2 symbolem 1 označena vstupní svorka, je nyní umístěn napěťový zdroj o napětí  $V_S$ . Tento zdroj dodává do analyzované struktury proud  $I_S$ . Jeden pól zdroje je připojen přímo na analyzovanou strukturu, druhý pak na pomocný mikropásek (tzv. stub), který představuje proti zemi určitou impedanci  $Z_{stub}$ . Vstupní impedance  $Z_1$  je pak dána vztahem

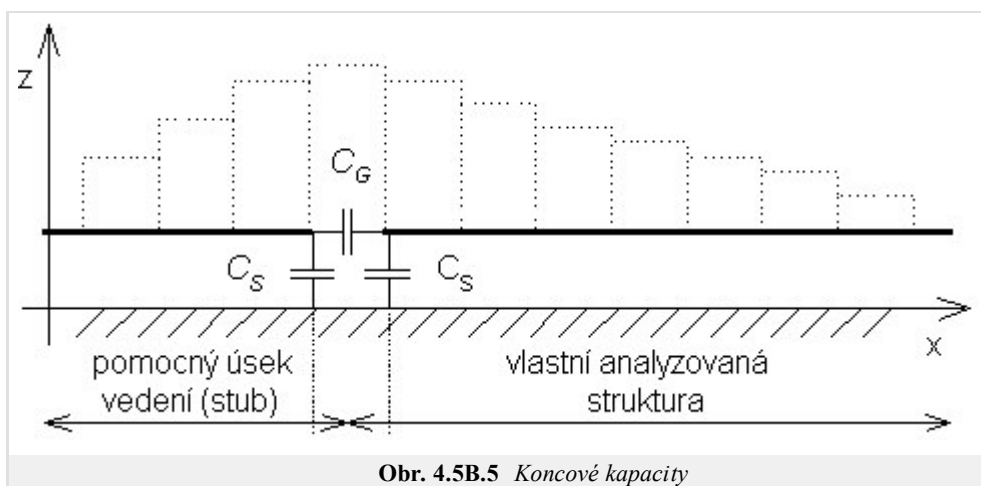
$$Z_1 = Z_S - Z_{stub}, \quad (4.5B.7)$$

kde impedanci  $Z_S$  stanovíme z podílu napětí  $V_S$  (jeho hodnotu si můžeme při analýze zvolit) a proudu  $I_S$ . Impedanci  $Z_{stub}$  stanovíme analyticky jako  $-Z_0 \cot(\beta l_{stub})$ .



Obr. 4.5B.4 Aproximace proudové distribuce na struktuře z obr. 4.5B.2; horizontální de-embedding.

Pokud provedeme výpočet impedance naznačeným způsobem, nebude výsledek přesně odpovídat skutečnosti, protože jsme neuvážili vliv koncových kapacit (viz obr. 4.5B.5).



Obr. 4.5B.5 Koncové kapacity

Při respektování kapacit je nutné k impedanci  $Z_{stub}$  připočíst paralelně impedanci  $Z_S = 1/j\omega C_S$  (kapacita  $C_S$  není kapacitou otevřeného konce, ale je menší). Tím získáme  $Z_{stub}' = Z_{stub} \parallel Z_S$ . Kapacita  $C_G$  je však už zahrnuta v impedanci  $Z_S$  a po vypočtení impedance  $Z_1' = Z_S - Z_{stub}'$  je nutné pouze odečíst  $Z_S$ . Výsledná (korigovaná) impedance pak je  $Z_1'' = Z_1' Z_S / (Z_S - Z_1')$ .

Soustava rovnic pro neznámé uzlové hodnoty byla sestavena na základě fyzikálních úvah. Nyní uvedeme obecný matematický postup, odpovídající výše uvedeným úvahám:

1. Proudovou hustotu aproximujeme pomocí **bázových funkcí**

$$J_X(x, y) = \sum_{n=1}^{N_x} J_{X_n} B_{X_n} \quad J_Y(x, y) = \sum_{n=1}^{N_y} J_{Y_n} B_{Y_n}$$

V našem případě jsou bázové funkce po částech konstantní. Složitějšími bázovými funkcemi jsou pak stříškové bázové funkce (anglicky *rooftops*), které se v jednom směru mění lineárně a v druhém zůstávají konstantní.

2. Za potenciály dosadíme do (4.5B.1) jejich integrální vyjádření pomocí **Greenových funkcí**

$$\left\{ -j\omega \iint_{\Omega} \mathbf{G}_A(x-x', y-y') \mathbf{J}(x', y') dx' dy' \right\} + \left\{ -\nabla \left[ \iint_{\Omega} \mathbf{G}_q(x-x', y-y') \rho(x', y') dx' dy' \right] \right\} + \mathbf{E}^I = 0.$$

Zde symbol  $\Omega$  představuje oblast pokovení a  $E^I$  je intenzita dopadající vlny.

Za náboj dosadíme z **rovnice kontinuity** a proudovou hustotu vyjádříme jako kombinaci bázových funkcí. Tím dostáváme

$$\begin{aligned} \tilde{J}_x^{(n)}(x, y) &= \sum_{nx=1}^{N_x} J_x^{(nx)} \Pi^{(nx)}(x, y) \\ \left\{ -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Omega} G^q(x-x', y-y') \left[ \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{N_x} J_{X_n}(x', y') + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{N_y} J_{Y_n}(x', y') \right] dx' dy' \right\} + E_X^I &= 0, \\ \left\{ +j\omega \iint_{\Omega} \mathbf{G}_{yy}^A(x-x', y-y') \sum_{n=1}^{N_y} J_{Y_n}(x', y') dx' dy' \right\} - \\ \left\{ -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial}{\partial y} \iint_{\Omega} G^q(x-x', y-y') \left[ \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{N_x} J_{X_n}(x', y') + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{N_y} J_{Y_n}(x', y') \right] dx' dy' \right\} + E_Y^I &= 0. \end{aligned}$$

3. Pomocí **Galerkinovy metody** minimalizujeme chybu aproximace proudu. Dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \sum_n J_n^X \left\{ \langle T_{xm}, G_{xx}^A * B_{xn} \rangle + \frac{1}{\omega^2} \langle T_{xm}, \frac{\partial}{\partial x} [G_q * \frac{\partial}{\partial x} B_{Xn}] \rangle \right\} + \sum_n J_n^Y \left\{ \frac{1}{\omega^2} \langle T_{xm}, \frac{\partial}{\partial x} [G_q * \frac{\partial}{\partial y} B_{yn}] \rangle \right\} &= 0, \\ \sum_n J_n^X \left\{ \langle T_{ym}, G_{yy}^A * B_{yn} \rangle + \frac{1}{\omega^2} \langle T_{ym}, \frac{\partial}{\partial y} [G_q * \frac{\partial}{\partial y} B_{yn}] \rangle \right\} + \sum_n J_n^Y \left\{ \frac{1}{\omega^2} \langle T_{ym}, \frac{\partial}{\partial y} [G_q * \frac{\partial}{\partial x} B_{xn}] \rangle \right\} &= 0 \end{aligned}$$

v níž se vyskytují čtyřnásobné integrály. Vnitřní integrály jsou integrály konvoluční, a proto je značíme hvězdičkou. Vnější integrály jsou integrály korelační a jsou označeny závorkami  $\langle \rangle$ . Symbolem  $T$  značíme **váhové funkce** (v Galerkinově metodě jsou jimi funkce bázové).

Naše formulace momentové metody z matematického pohledu odpovídá případu, kdy roli **váhových funkcí** hrají **Diracovy impulsy**. Tento postup se označuje jako **kolokační metoda**.

4. Efektivně vypočteme všechny integrály a sestavíme soustavu rovnic. Jejím řešením jsou pak neznámé uzlové hodnoty proudové hustoty.
5. Ze známého rozložení proudu stanovíme další parametry antény ( čítel odrazu na příslušném portu, **vstupní impedance**, atd.).

Tím naše povídání o analýze mikropáskových antén momentovou metodou končí. Konkrétní příklady výpočtu uvádíme ve **vrstvě C**.